令和２年度（前期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　　学 （120 分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，下書きなどに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と下書用紙は，持ち帰りなさい。

補足説明

1. 科目等名　（前期日程）　**数　学**

2. 補足箇所及び補足内容

2ページ　$\boxed{4}$

i は虚数単位である。

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ t は $0 \leqq t < 2\pi$ を満たす実数とする。O を原点とする xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$, $\mathrm{P}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2})$, $\mathrm{Q}(\cos t, \sin t, 1)$ に対し，$p = \angle\mathrm{AOP}$, $q = \angle\mathrm{AOQ}$, $r = \angle\mathrm{POQ}$ とおく。ただし，$0 \leqq p \leqq \pi$, $0 \leqq q \leqq \pi$, $0 \leqq r \leqq \pi$ とする。

(1) p, q の値を求めよ。

(2) $\cos r$ を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $r \leqq p + q$ が成り立つことを示せ。

(4) 等式 $r = p + q$ が成り立つとする。このとき，t の値を求め，4 点 O, A, P, Q は同一平面上にあることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数全体で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ は，すべての実数 x について次の条件 (i) および (ii) を満たすとする。

(i) $f(x) + g(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$, $f(x)g(x) = -\dfrac{3x^2}{(1+x^2)^2}$

(ii) $f(x) \leqq g(x)$

(1) $x \geqq 0$ と $x < 0$ のそれぞれの場合について，$f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

(2) 微分可能であることの定義に従って，$g(x)$ が $x = 0$ で微分可能であるかどうかを調べよ。

(3) 関数 $g(x)$ について，増減および極限 $\lim_{x\to\infty} g(x)$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ を調べよ。また，$g(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(以下余白) ［前期］

3 a, b は実数で，$a \fallingdotseq 0, b \fallingdotseq 0$ とする。実数全体で定義された関数 $f(x) = e^{ax} + e^{bx}$ に対して xy 平面の曲線 $C : y = f(x)$ を考える。各実数 t に対し，点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ と点 $\mathrm{Q}(t+1, f(t+1))$ を端点にもつ線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ で表す。

(1) 曲線 C は区間 $(-\infty, \infty)$ で下に凸であることを示せ。

(2) $S(t)$ を求めよ。ただし，次の事実を用いてよい。

> $g(x)$ を実数全体で定義された関数とし，第 2 次導関数をもつとする。α, β を $\alpha < \beta$ を満たす実数とする。xy 平面の曲線 $y = g(x)$ が区間 (α, β) で下に凸であるとき，点 $(\alpha, g(\alpha))$ と点 $(\beta, g(\beta))$ を通る直線の方程式を $y = mx + n$ とすれば，
>
> $$mx + n \geqq g(x) \quad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$
>
> が成り立つ。

(3) $a = 2, b = -1$ の場合を考える。t が実数全体を動くときの $S(t)$ の最小値を求めよ。必要ならば，$2 < e < 3$ であることを用いてよい。

4 p, q を実数とし，$p \fallingdotseq 0, q \fallingdotseq 0$ とする。2 次方程式

$$x^2 + 2px + q = 0$$

の 2 つの解を α, β とする。ただし，重解の場合は $\alpha = \beta$ とする。

(1) α, β がともに実数のとき，$\alpha(z+i)$ と $\beta(z-i)$ がともに実数となる複素数 z は存在しないことを示せ。

(2) α, β はともに虚数で，α の虚部が正であるとする。$\alpha(z+i)$ と $\beta(z-i)$ がともに実数となる複素数 z を p, q を用いて表せ。

（問題終り）

（以下余白）　　［前期］