令和２年度（後期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　　学　（120 分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，下書きなどに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と下書用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を $0 < a < \pi$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = 2x + \sin x$ を考える。点 $\mathrm{P}(a, 2a + \sin a)$ における C の接線を m とする。x 軸に平行な直線 $y = 2a$ と m との交点を Q とおく。点 $\mathrm{R}(a, 2a)$ と Q との距離を $\ell(a)$ で表す。

(1) $\ell(a)$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0} \frac{\ell(a)}{a}$ および $\displaystyle\lim_{a\to\pi-0} \frac{\ell(a)}{\pi - a}$ を求めよ。

(3) a が $0 < a < \pi$ の範囲を動くときの $\ell(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を $a > 1$ を満たす実数とする。$x \geqq 0$ を定義域とする関数 $f(x)$ を，$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して

$$f(x) = (x - n)^{a-1} - (x - n)^a \qquad (n \leqq x < n + 1 \text{ のとき})$$

により定める。また，定積分 I_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を

$$I_n = \int_n^{n+1} e^{-ax} f(x)\,dx$$

で定める。

(1) b を正の実数とする。$x \geqq 0$ を定義域とする関数 $e^{-ax}x^b$ に対して，$x > 0$ における導関数 $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}x^b\right)$ を求めよ。

(2) I_0 を求めよ。

(3) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して I_n を求めよ。

(4) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^n e^{-ax} f(x)\,dx$ を求めよ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$ を求めよ。

（以下余白） ［後期］

3　x の多項式 $P(x)$ は，係数が実数の 2 次式であり，x^2 の係数は 1 であるとする。さらに，4 次方程式

$$\{P(x)\}^2+12P(x)+35=0$$

の解が $x=p,\ p+1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}$ であるとする。ただし，p は実数，α は複素数，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数であり，α は $|\alpha|=\dfrac{5}{2}$ を満たし，α の実部および虚部はともに正であるとする。このとき，p および α の値を求めよ。

4　d を自然数とし，$w=\cos\dfrac{\pi}{d}+i\sin\dfrac{\pi}{d}$ とおく。ただし，i は虚数単位である。

n を自然数とする。n 回サイコロを投げ，$k=1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して k 回目に出る目を X_k とする。複素数 $Z_0,\ Z_1,\ \cdots\cdots,\ Z_n$ を次の規則により定める。

$$Z_0=1$$

$$k=1,\ \cdots\cdots,\ n \text{ に対し}\quad Z_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2}Z_{k-1} & (X_k=1 \text{ のとき})\\[2mm] \dfrac{1}{2}\overline{w}Z_{k-1} & (X_k=2,\ 3 \text{ のとき})\\[2mm] 2wZ_{k-1} & (X_k=4,\ 5,\ 6 \text{ のとき})\end{cases}$$

ただし，$\overline{w}$ は w と共役な複素数を表す。

(1)　上記の n 回サイコロを投げる試行において，n 回中 1 の目の出る回数を A とし，2 または 3 の目の出る回数を B とし，4, 5, 6 のいずれかの目の出る回数を C とする。Z_n の絶対値および Z_n の偏角の 1 つを，$A,\ B,\ C$ および d を用いて表せ。

(2)　$d=100,\ n=101$ の場合に，Z_n が負の実数となる確率 p を求めよ。ただし，確率 p を表記する際に，2^{100} と 3^{100} は計算せずそのまま用いてよい。

(3)　$n=4d$ の場合に，$Z_n=1$ となる確率 q を d を用いて表せ。

（問題終り）

（以下余白）　［後期］