平成29年度（前期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　　学（120分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ $s,\ t$ を $0 < s < 1,\ 0 < t < 1$ を満たす実数とする。xy 平面において，原点 $\mathrm{O}(0,0)$，点 $\mathrm{A}(p,q)$ $(q > 0)$ および点 $\mathrm{B}(1,0)$ を頂点とする三角形 OAB を考える。線分 AO を $s:(1-s)$ の比に内分する点を C とし，線分 AB を $t:(1-t)$ の比に内分する点を D とする。点 A から直線 CD に下ろした垂線を AH とし，線分 AH の長さを h とおく。また，線分 CD の長さを ℓ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $s,\ t$ および $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) h を $s,\ t,\ q$ および ℓ を用いて表せ。また，ℓ を $s,\ t,\ p,\ q$ を用いて表せ。

(3) $s,\ t$ および q を固定する。p が実数全体を動くときの h の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta \quad \left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定める。$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 t に対し，xy 平面における曲線 $y = f(x)$ $\left(t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さを $\ell(t)$ とおく。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ。

(2) $\ell(t)$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\bigl(\ell(t) - f(t)\bigr)$ を求めよ。

（以下余白）　　［前期］

3 a を正の実数とし，n を自然数とする。i を虚数単位とし，複素数 $z_n = 1 + \frac{a}{n}i$ を考え，$r_n = |z_n|$, $\theta_n = \arg z_n$ $\left(0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}\right)$ とおく。このとき次の問いに答えよ。ただし，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲における増減を調べよ。

(2) 不等式 $n\theta_n < (n+1)\theta_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n$ および $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n)^n$ を求めよ。

4 n を 2 以上の自然数とする。n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ が条件 $a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n$ を満たすとする。$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ は n 個の数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ をすべて並べた順列であり，順列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ とは異なるとする。

(1) 実数 p_1, p_2, q_1, q_2 が $p_1 < p_2$ および $q_1 < q_2$ を満たすとき，不等式

$$p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$$

が成り立つことを示せ。

(2) $b_i > b_j$ を満たす 2 つの自然数 i, j $(1 \leqq i < j \leqq n)$ が存在することを示せ。

(3) n 個の数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ をすべて並べた順列 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ で，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

を満たすものが存在することを示せ。

（問題終り）

（以下余白）　　［前期］